

Università degli Studi della Basilicata  
Facoltà di Ingegneria



Corso di

**FONDAMENTI DI  
TECNICA DELLE COSTRUZIONI**

Docente: Prof. Ing. Angelo MASI

Collaboratori: Dr. Ing. Giuseppe Santarsiero

Ing. Vincenzo Manfredi

**RICHIAMI DI STATICA**

1.	GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI .....	3
2.	EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.....	5
3.	CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI .....	6
3.1	Trave appoggiata-appoggiata con forza concentrata in mezzeria.....	7
3.2	Trave appoggiata-appoggiata con forza concentrata in un punto generico .....	9
3.3	Trave appoggiata-appoggiata con carico uniformemente distribuito .....	10
3.4	Trave incastrata con forza concentrata nell'estremo libero .....	11
3.5	Trave incastrata con forza concentrata in un punto generico.....	12
3.6	Trave incastrata con carico uniformemente distribuito.....	13
3.7	Trave incastrata con carico distribuito parziale .....	14
5.	CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI.....	20
6.	SISTEMI DI TRAVI IPERSTATICHE.....	23
6.1	Trave continua su più appoggi: equazione dei tre momenti .....	24

# 1. GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

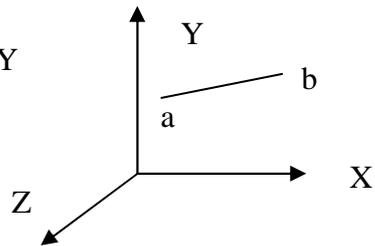
Consideriamo un'asta a-b vincolata a muoversi nel piano X-Y

In questo piano vi sono 3 Gradi di libertà

Spostamento lungo X,  $D_x$

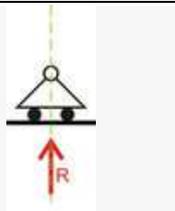
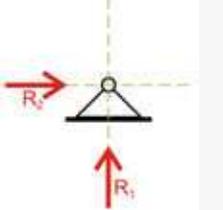
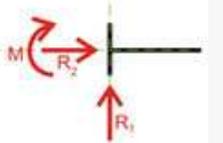
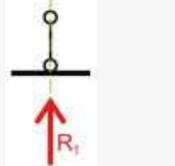
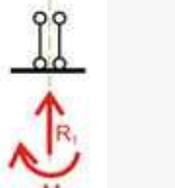
Spostamento lungo Y,  $D_y$

Rotazione attorno a Z,  $R_z$



Al fine di mantenere in equilibrio un'asta o un sistema di aste su cui agiscono delle azioni esterne (forze e coppie) è necessario prevedere l'imposizione di vincoli.

Vediamo i vincoli possibili ed i gradi di libertà (g.d.l.) che essi sono in grado di eliminare

	$D_x$	$D_y$	$R_z$	Totale g.d.l. eliminati
 <p>Il carrello</p>	NO	SI	NO	1
 <p>La cerniera</p>	SI	SI	NO	2
 <p>L'incastro</p>	SI	SI	SI	3
 <p>Il pendolo</p>	NO	SI	NO	1
 <p>Il doppio pendolo</p>	NO	SI	SI	2

SI: g.d.l. vincolato

NO: g.d.l. non vincolato

Nel disegno relativo ad ogni tipo di vincolo vengono anche rappresentate le reazioni vincolari (forze e coppie) che il vincolo stesso è in grado di esplicare in relazione ai g.d.l. bloccati.

Al fine di analizzare la statica di un'asta caricata da un sistema di forze, per prima cosa bisogna stabilire se l'asta che si sta studiando è labile, isostatica oppure iperstatica.

Un'asta è labile se il numero di gradi di libertà vincolati è minore del numero di gradi libertà dell'asta stessa.

Un'asta è isostatica se il numero di g.d.l. vincolati è uguale al numero di g.d.l..

Infine un'asta si dice iperstatica se il numero di g.d.l. vincolati supera il numero di g.d.l..

In base alle precedenti definizioni e sapendo che un'asta presenta 3 g.d.l. nel piano si può ricavare una semplice espressione per stabilire se un'asta è labile isostatica o iperstatica:

- trave labile  $3t-s > 0$
- trave isostatica  $3t-s = 0$
- trave iperstatica  $3t-s < 0$

Dove  $t$  è il numero di tratti elementari di cui è costituita l'asta mentre  $s$  è il numero di g.d.l. vincolati.

#### Esempio: trave con due carrelli



Abbiamo un solo tratto ( $T=1$ ), quindi  $3t=3$

Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 2 (2 carrelli) quindi  $s=2$

Allora  $3t-s=1$  la trave è labile e, intuitivamente, applicando una forza orizzontale si capisce come il sistema sarebbe in grado di muoversi in direzione orizzontale.

#### Esempio: trave con carrello e cerniera

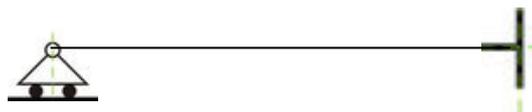


Abbiamo ancora un solo tratto, quindi  $3t=3$

Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 3 (1 carrello e 1 cerniera) quindi  $s=3$

Allora  $3t-s=0$  la trave è isostatica ovvero è in grado di rimanere in equilibrio sotto un sistema di forze esterne.

#### Esempio: trave con carrello e incastro



Abbiamo un solo tratto quindi  $3t=3$

Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 4 (1 carrello e 1 incastro) quindi  $s=4$

Allora  $3t-s=-1$ , la trave è una volta iperstatica ovvero ha un numero di vincoli ridondante.

## 2. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido risulti in equilibrio è che siano nulle:

- la risultante delle forze applicate (equilibrio alla traslazione), cioè la sommatoria delle forze dovrà essere uguale a 0;
- la risultante dei momenti delle forze e delle coppie applicate (equilibrio alla rotazione) deve essere uguale a 0.

Prima equazione cardinale

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

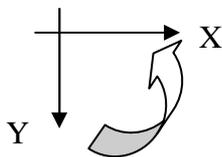
$f_i$  = forza generica (anche le reazioni vincolari sono forze)

Seconda equazione cardinale

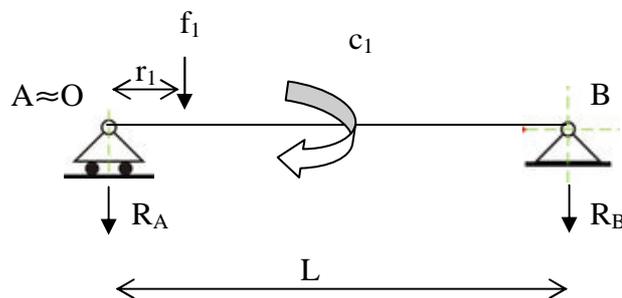
$$\mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$$

$M_o$  è la sommatoria di tutte le coppie  $c_j$  e di tutti i momenti generati dalle forze  $f_i$  agenti con braccio  $r_i$  rispetto al polo O.

Per convenzione le forze vengono considerate positive se dirette concordemente ai versi positivi del seguente sistema di riferimento. Le coppie sono positive se agiscono in senso antiorario.



Caso elementare: trave doppiamente appoggiata caricata da una forza ed una coppia. Il polo o viene assunto coincidente con l'appoggio di sinistra "A", ovvero il carrello.



Le equazioni precedenti diventano

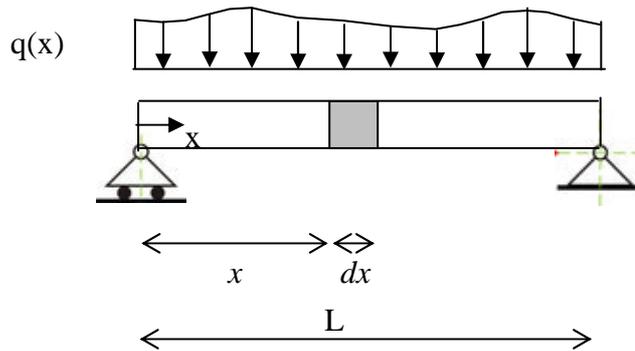
$$f_1 + R_A + R_B = 0$$

$$-f_1 r_1 - c_1 - R_B \cdot L = 0$$

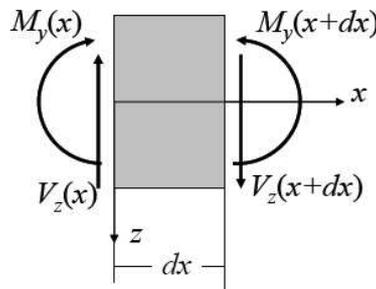
Dunque abbiamo un sistema di due equazioni nelle due incognite  $R_A$  ed  $R_B$

### 3. CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI

In una trave genericamente vincolata e caricata insorgono delle sollecitazioni interne quali taglio, momento flettente, sforzo assiale nonché torsione. Tralasciando quest'ultima sollecitazione e considerando la trave di seguito riportata si potrà estrarre un concio elementare il quale sarà in equilibrio sotto le azioni esterne proprio grazie alle sollecitazioni interne.

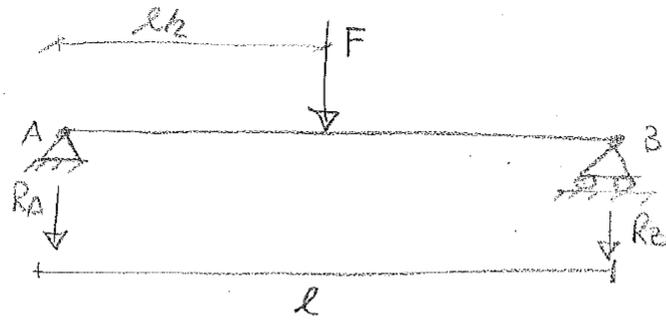


Con un carico di questo tipo avremmo solamente taglio e momento flettente come riportato di seguito. Il momento flettente si considera positivo, per convenzione, se tende le fibre inferiori, come riportato in figura. Il taglio sul concio è positivo se induce una rotazione dello stesso in senso orario. Quindi su una faccia di sinistra il taglio positivo è rappresentato da una forza diretta verso l'alto mentre su una faccia di destra il taglio positivo equivale ad una forza diretta verso il basso.



Quindi un momento flettente positivo può essere generato da una coppia esterna sia negativa che positiva come anche il taglio positivo può essere generato da forze esterne e reazioni vincolari sia positive che negative.

### 3.1 Trave appoggiata-appoggiata con forza concentrata in mezzera



REAZIONI VINCOLARI

$$\begin{cases} R_A + R_B + F = 0 \\ -F \frac{l}{2} - R_B l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_A + R_B + F = 0 \\ R_B = -\frac{F}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} R_A - \frac{F}{2} + F = 0 \\ R_B = -\frac{F}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} R_A = -\frac{F}{2} \\ R_B = -\frac{F}{2} \end{cases}$$

$R_A = R_B = -\frac{F}{2}$  (SONO ENTRAMBE DIRETTE VERSO L'ALTO)

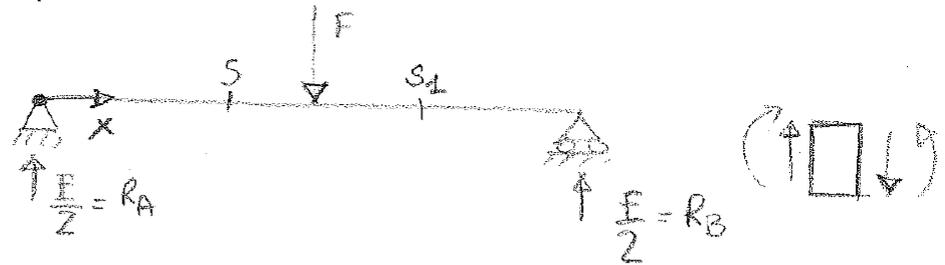


DIAGRAMMA DEL TAGLIO

IN UNA GENERALE SEZIONE S SI PUO' DETERMINARE, CONE SOMMA DI TUTTE LE FORZE AGENTI A DESTRA O A SINISTRA DELLA SEZIONE. PER  $0 < x < l/2$  CONVIENE PRENDERE LE FORZE A SINISTRA

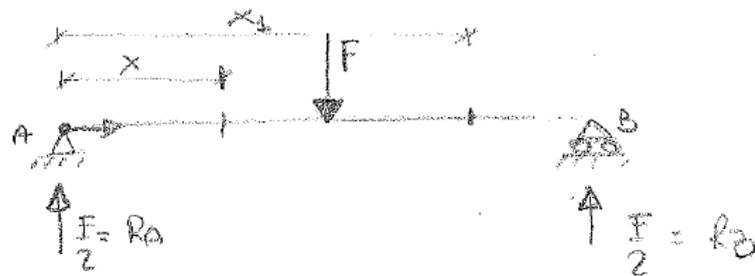
$$T(S) = \frac{F}{2} \quad (\text{E' COSTANTE FINO AD } x = l/2)$$

$$T(S_1) = \frac{F}{2} - F = -\frac{F}{2} \quad (\text{E' COSTANTE FINO A } x = l)$$



# DETERMINAZIONE DEL MOMENTO FLETTENTE

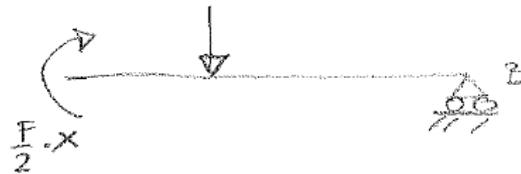
(2)



A DISTANZA  $x$  DALL'APPOGGIO A SI PUO' CALCOLARE IL MOMENTO FLETTENTE COME SOMMA DEI MOMENTI DELLE FORZE APPLICATE A SINISTRA O A DESTRA DELLA SEZIONE CONSIDERATA

$$M(x) = \frac{F}{2} \cdot x \quad (\text{E' POSITIVO PERCHE' TENDE LE FIBRE INFERIORI})$$

IL MOMENTO E' LINEARE



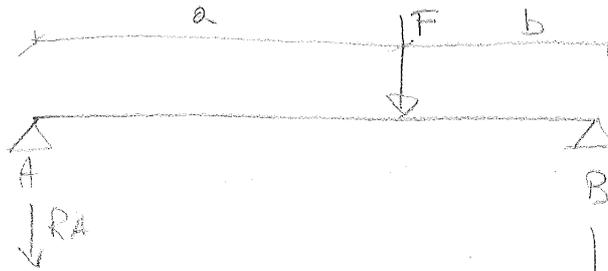
$$M(x_1) = \frac{F}{2} \cdot x_1 - F(x_1 - l/2) = -\frac{F}{2} x_1 + \frac{F l}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{CAUSA DEI VINCOLI}$$



$$\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F l}{4} = M(l/2)$$

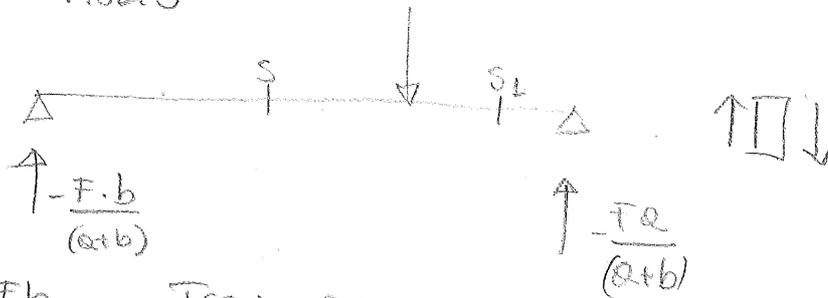
### 3.2 Trave appoggiata-appoggiata con forza concentrata in un punto generico



REAZIONI VINCOLARI

$$\begin{cases} R_A + R_B + F = 0 \\ -F \cdot a - R_B(a+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A + F - \frac{F \cdot a}{(a+b)} = 0 \\ R_B = -\frac{F \cdot a}{(a+b)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = F \left( \frac{a}{a+b} - 1 \right) = -\frac{F \cdot b}{a+b} \\ R_B = -\frac{F \cdot a}{(a+b)} \end{cases}$$

DIAGRAMMA DEL TAGLIO



$$T(s) = -R_A = \frac{F \cdot b}{(a+b)}$$

$$T(s_2) = R_B = -\frac{F \cdot a}{(a+b)}$$

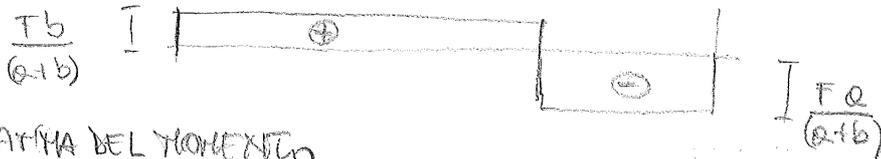
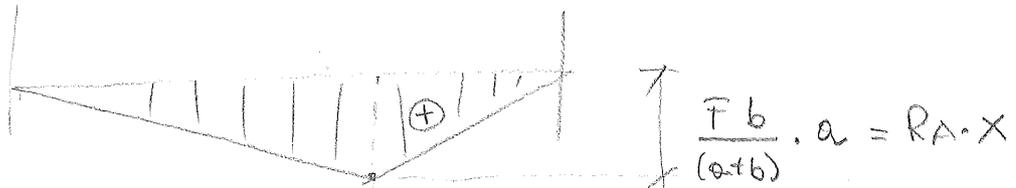


DIAGRAMMA DEL MOMENTO



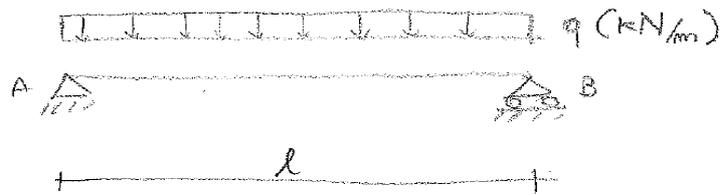
$$M(s) = R_A \cdot x$$

$$M(s_2) = R_A \cdot x - F(x-a)$$

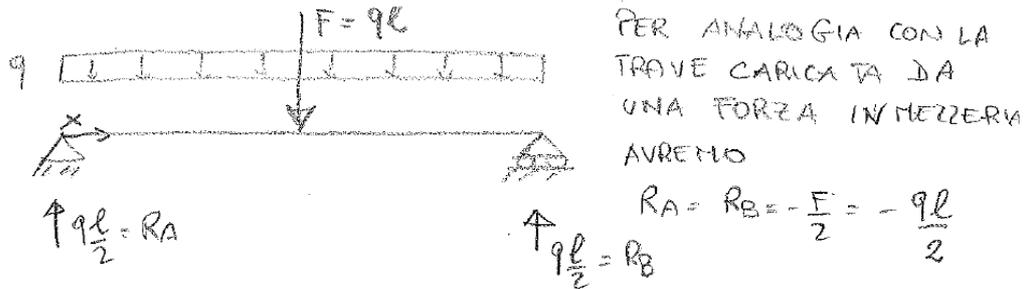


(□) Tende sempre le fibre inferiori

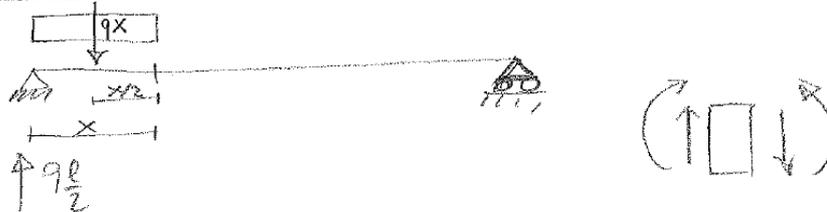
### 3.3 Trave appoggiata-appoggiata con carico uniformemente distribuito



AI FINI DEL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI IL CARICO DISTRIBUITO DEVE ESSERE SOSTITUITO DALLA SUA RISULTANTE  $q \cdot l$  APPLICATA NEL BARICENTRO DELLA DISTRIBUZIONE



#### DIAGRAMMA DEL TAGLIO



$$T(x) = \frac{ql}{2} - qx = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$T(0) = \frac{ql}{2} \quad T(l) = -\frac{ql}{2}$$

IL TAGLIO È UNA FUNZIONE LINEARE CHE VARIA TRA  $\frac{ql}{2}$  E  $-\frac{ql}{2}$



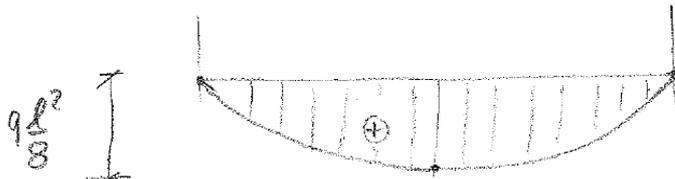
#### DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = 0$$

$$M(x) = \frac{ql}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

$$M(x/2) = \frac{ql^2}{8}$$

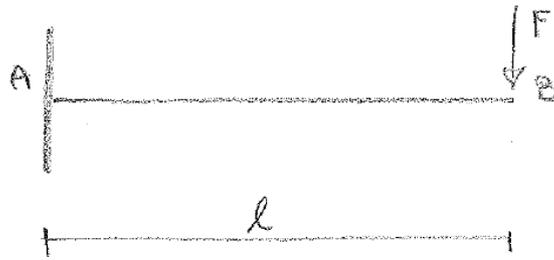


$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow l - 2x = 0$$

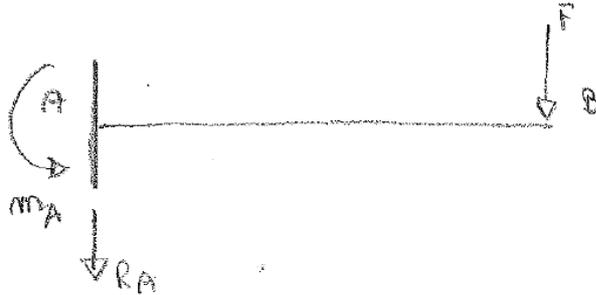
$$x = \frac{l}{2}$$

LA DERIVATA SI ANNULLA IN MEZZERA  
IN  $x = \frac{l}{2}$  IL MOMENTO È MASSIMO

### 3.4 Trave incastrata con forza concentrata nell'estremo libero

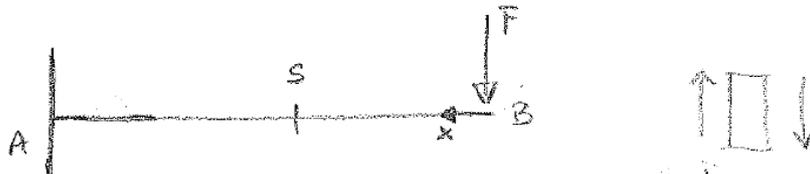


REAZIONI VINCOLARI



$$\begin{cases} M_A - F \cdot l = 0 \\ R_A + F = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_A = F \cdot l \text{ (IN SENSO ANTIORARIO)} \\ R_A = -F \text{ (DIRETTA VERSO L'ALTO)} \end{cases}$$

DIAGRAMMA DEL TAGLIO



CONSIDERO LE FORZE A DESTRA

$T(s) = F$  PER QUALUNQUE SEZIONE S  $T = \text{COST} = F$

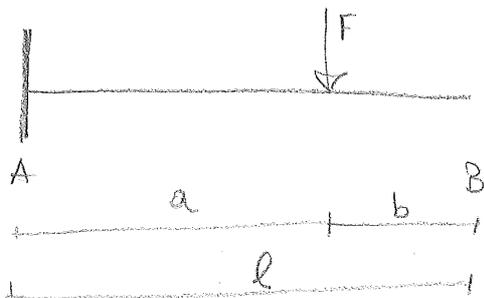


DIAGRAMMA DEL MOMENTO

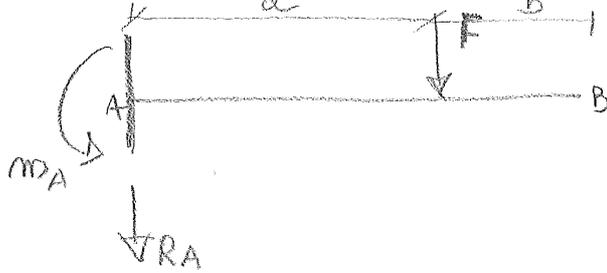
$$\begin{cases} M(s) = -F \cdot x \\ M(0) = 0 \\ M(l) = -M_A = -Fl \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{FUNZIONE LINEARE VARIABILE} \\ \text{FRA } 0 \text{ e } -Fl \end{array} \right\} \quad \text{Diagram showing a linear moment distribution from 0 to } -Fl$$



### 3.5 Trave incastrata con forza concentrata in un punto generico

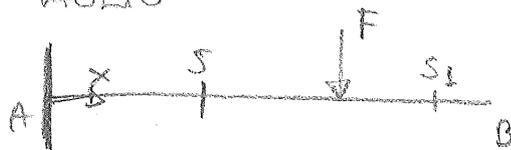


REAZIONI VINCOLARI



$$\begin{cases} m_A - F \cdot a = 0 \\ R_A + F = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_A = F \cdot a \\ R_A = -F \end{cases}$$

DIAGRAMMA DEL TAGLIO



$T(s) = F$  per  $0 < x < a$

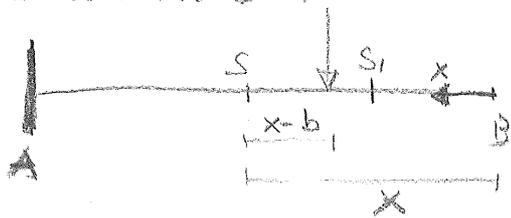
$T(s) = 0$  per  $x > a$  (a destra di  $s_1$  non c'è forza)



DIAGRAMMA DEL MOMENTO

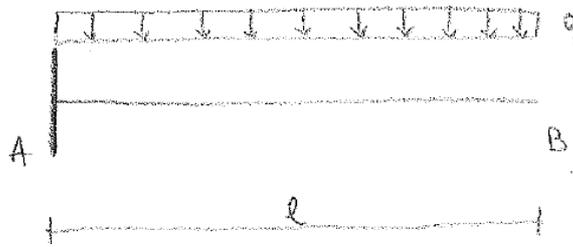
$M(s) = -F(x-b)$

$M(s_1) = 0$

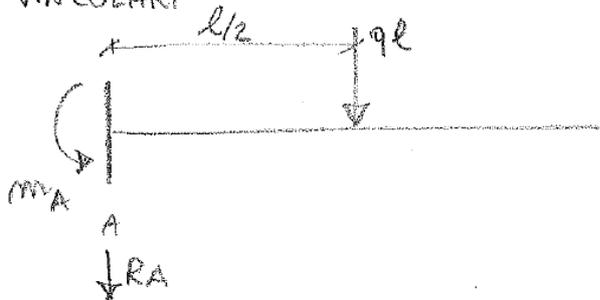


Tende le fibre superiori (negativo)

### 3.6 Trave incastrata con carico uniformemente distribuito

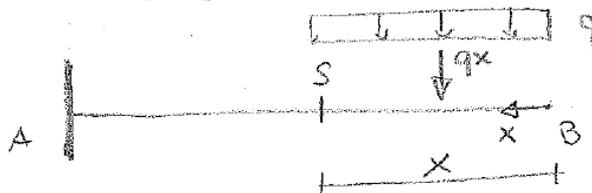


REAZIONI VINCOLARI



$$\begin{cases} m_A - q l \frac{l}{2} = 0 \\ R_A + q l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_A = \frac{q l^2}{2} \\ R_A = -q l \end{cases}$$

DIAGRAMMA DEL TAGLIO



CONSIDERO LE FORZE A DESTRA DI "S"

$$\begin{aligned} T(s) &= q \cdot x \\ T(l) &= -R_A = q l \\ T(0) &= 0 \end{aligned}$$

$T(x) \equiv$  FUNZIONE LINEARE VARIABLE TRA 0 e  $q l$



DIAGRAMMA DEL MOMENTO FLETTENTE

$$\begin{aligned} M(s) &= -q x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{q x^2}{2} \\ M(0) &= 0 \\ M(l) &= -m_d = -\frac{q l^2}{2} \end{aligned}$$

FUNZIONE QUADRATICA VARIABLE TRA 0 e  $-\frac{q l^2}{2}$

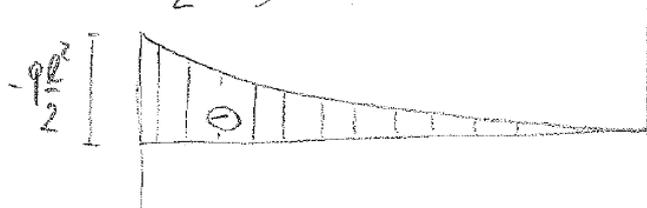
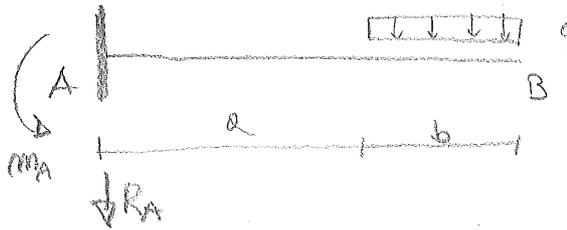


DIAGRAMMA DEL MOMENTO DALLA PARTE DELLE FIBRE TESI (SUPERIORI)

### 3.7 Trave incastrata con carico distribuito parziale



REAZIONI VINCOLARI

$$\begin{cases} M_A - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \\ R_A + qb = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} M_A = qb\left(a + \frac{b}{2}\right) \\ R_A = -qb \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{IL CARICO } q \text{ È STATO} \\ \text{SOSTITUITO DA UNA FORZA} \\ \text{CONCENTRATA PARI A } qb \end{array}$$

DIAGRAMMA DEL TAGLIO

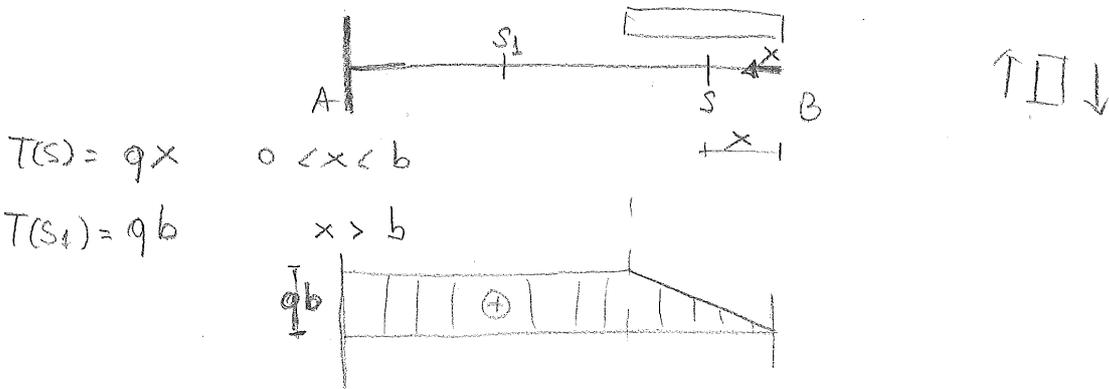
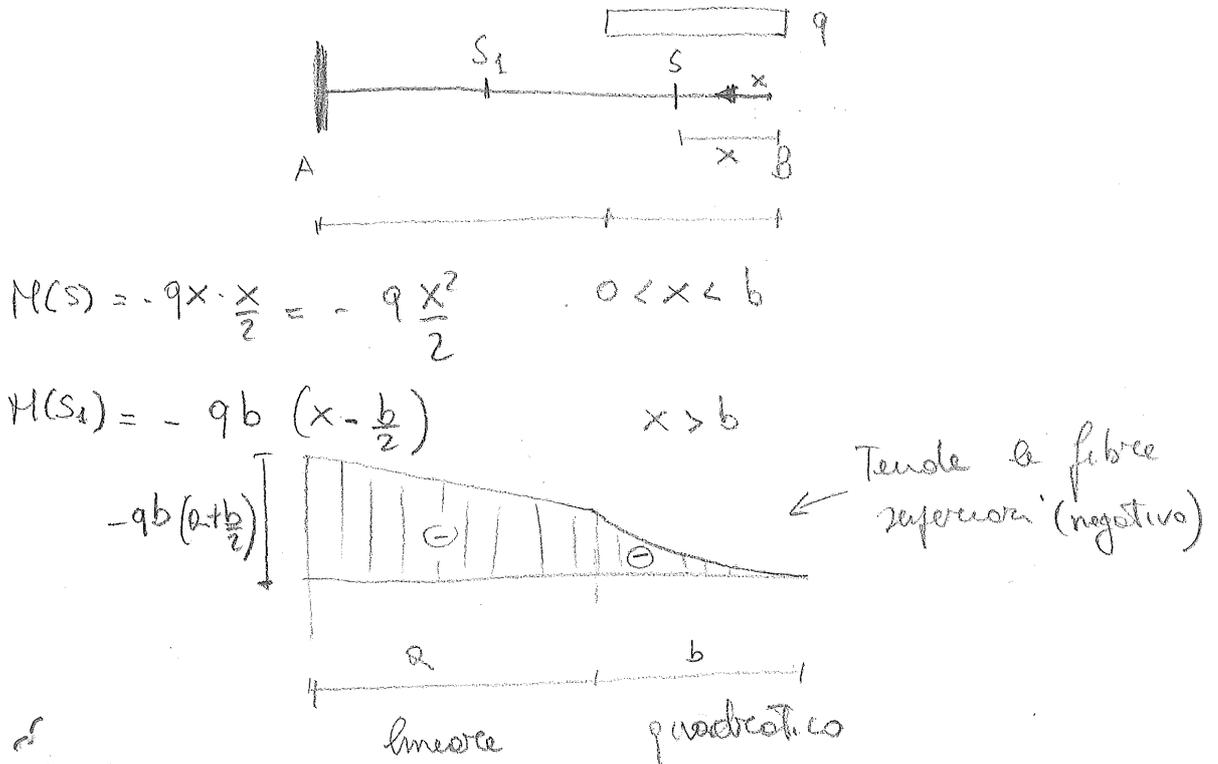


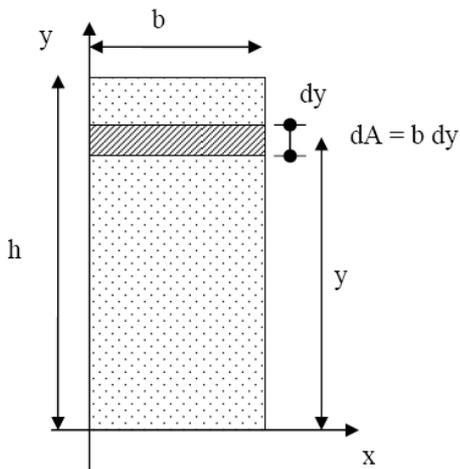
DIAGRAMMA DEL MOMENTO



## 4. GEOMETRIA DELLE AREE

### Momento statico e baricentro di un'area

Il momento statico o di primo ordine di un'area elementare  $dA$  rispetto ad un asse (ad esempio  $x$ ) è dato dal prodotto dell'area  $dA$  per la sua distanza dall'asse considerato ( $y$ ).



Volendo calcolare il momento statico di un'intera figura geometrica, ad esempio un rettangolo, si dovrà impostare un integrale sia rispetto all'asse  $x$  che rispetto all'asse  $y$ . In particolare:

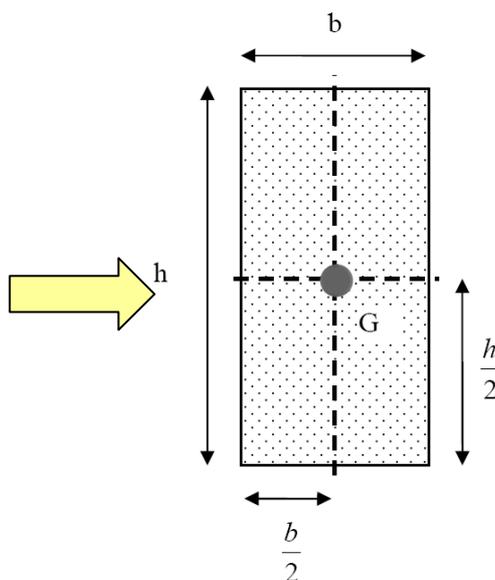
$$S_x = \int_0^h y dA = \int_0^h b y dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b h^2}{2}$$

$$S_y = \int_0^b x dA = \int_0^b h x dx = h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{h b^2}{2}$$

$S_x$  ed  $S_y$  sono i momenti statici rispetto agli assi  $x$  e  $y$ . Si noti che tali grandezze sono espresse come lunghezza elevata al cubo  $[L]^3$ .

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b h^2}{2}}{b h} = \frac{h}{2}$$

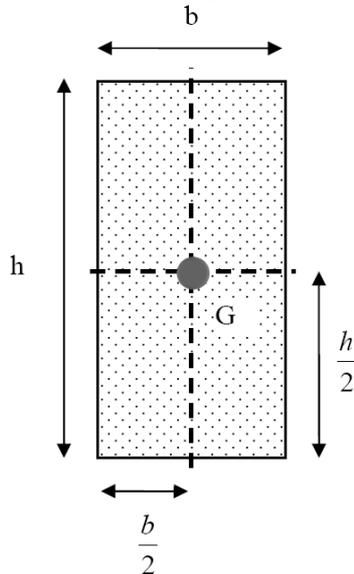
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h b^2}{2}}{b h} = \frac{b}{2}$$



Il baricentro  $G$  è quel punto in cui si dovrebbe concentrare l'intera area della figura per avere il medesimo momento statico. Quindi la posizione del baricentro si può facilmente determinare dividendo il momento statico per l'area della figura geometrica;

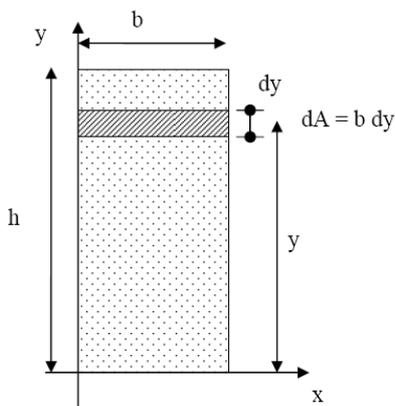
Si noti che se il sistema di riferimento x-y ha come origine il baricentro G, i momenti statici risulteranno nulli (infatti il baricentro G dovrà avere coordinate x=0 e y=0).

Per le sezioni per cui è possibile individuare due assi rispetto ai quali la sezione è simmetrica, il punto di intersezione rappresenta la posizione del baricentro. Per esempio, per un rettangolo il baricentro si può determinare come punto di intersezione delle rette passanti per il punto medio dei lati e ad essi ortogonali.



### Momenti di inerzia o di secondo ordine

Il momento di inerzia di un'area elementare dA rispetto ad un asse è dato dal prodotto fra l'area ed il quadrato della distanza dall'asse. Il momento di inerzia, o inerzia in generale, di una sezione rispetto ad un asse si può definire come la resistenza a ruotare intorno all'asse considerato.



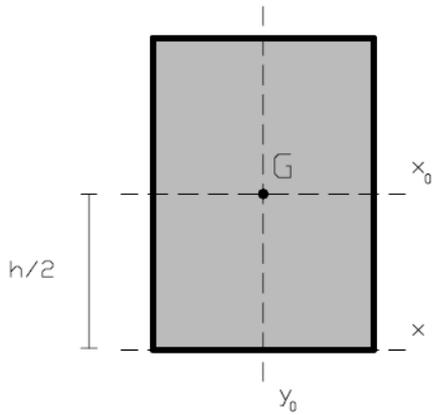
$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

Il momento di inerzia di un rettangolo rispetto all'asse x posto sulla base inferiore è:

$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \, dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h \cdot b = \frac{bh^3}{3}$$

Analogamente rispetto ad y si avrà  $I_y = \frac{hb^3}{3}$

Calcoliamo i momenti di inerzia rispetto al baricentro del rettangolo, denominando  $x_0$  ed  $y_0$  gli assi passanti per G



$$I_{x_0} = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \, dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = b \frac{1}{3} [y^3]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Analogamente rispetto all'asse  $y_0$

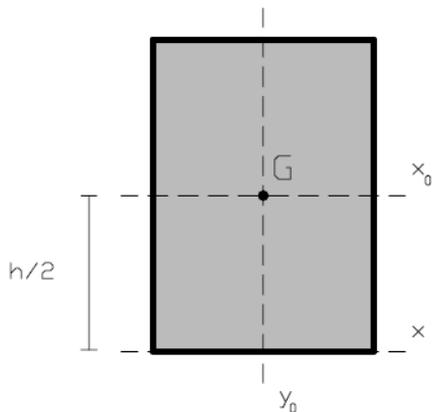
$$I_{y_0} = \frac{b^3 h}{12}$$

Come si può notare il momento di inerzia di una sezione rettangolare calcolato rispetto ad un asse baricentrico è 4 volte più piccolo di quello calcolato rispetto allo stesso asse ma collocato lungo il lato parallelo.

Molto importante è il teorema di trasposizione dei momenti di inerzia. Infatti quando conosciamo il momento di inerzia rispetto ad un asse, applicando questo teorema possiamo calcolare il momento di inerzia rispetto ad un altro asse parallelo al primo.

Il teorema prevede che: **il momento di inerzia rispetto ad un asse generico  $x_k$  è uguale al momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico e parallelo al primo sommato al prodotto dell'area per la distanza  $d$  tra i due assi elevata al quadrato.**

$$I_{x_k} = I_{x_0} + Ad^2$$



Applichiamo questo teorema per trovare  $I_x$  a partire da  $I_{x_0}$

$$I_x = I_{x_0} + bh \left[ \frac{h}{2} \right]^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

Naturalmente il risultato coincide con quanto trovato in precedenza calcolato direttamente il momento di inerzia rispetto all'asse x. Si noti che, per come viene definito, il momento di inerzia è dimensionalmente una lunghezza elevata alla quarta  $[L]^4$ .

### Assi principali di inerzia

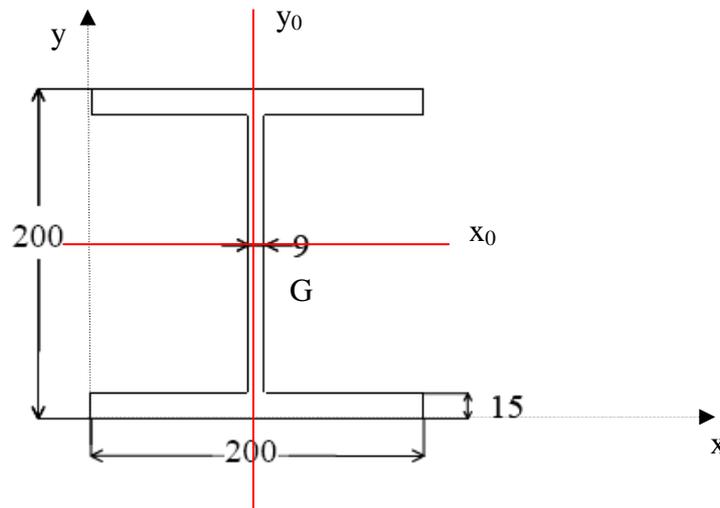
Va specificato che gli assi  $x_0$  e  $y_0$  baricentrici sono anche "assi principali di inerzia". Infatti, un'asse baricentrico è asse principale di inerzia quando il momento di inerzia rispetto ad esso è massimo oppure minimo. In effetti, nel caso appena visto  $I_{x_0}$  è il momento di inerzia massimo e  $I_{y_0}$  rappresenta il momento di inerzia minimo. Per una sezione doppiamente simmetrica, quindi, gli assi di simmetria sono anche assi principali di inerzia.

### Raggio giratore d'inerzia

Il raggio giratore di inerzia è data dalla radice quadrata del rapporto tra momento di inerzia e area della sezione. Rappresenta la distanza da baricentro a cui porre l'intera area della sezione per poter avere lo stesso momento di inerzia.

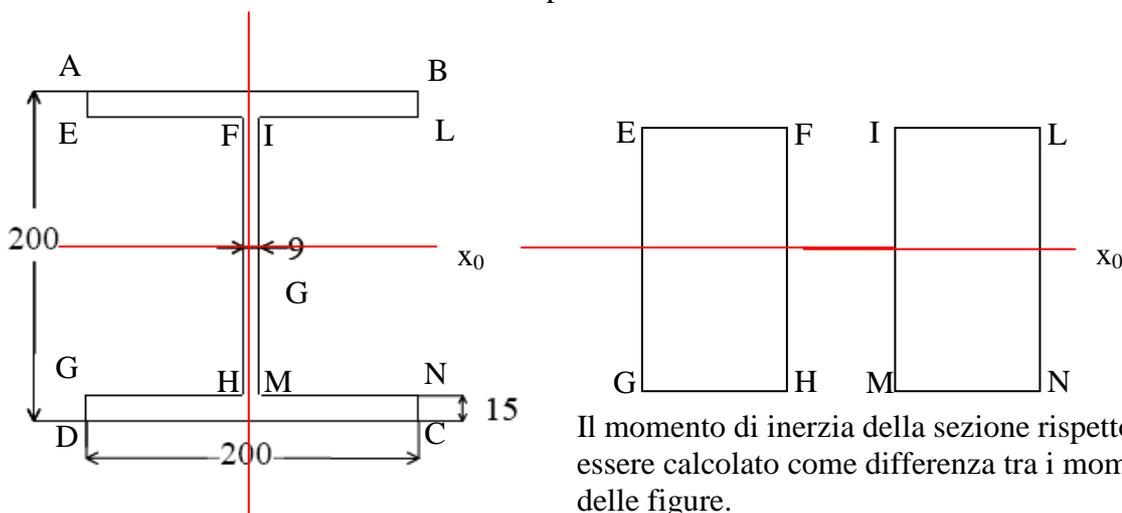
Esempio

Si calcoli la posizione del baricentro e i momenti di inerzia lungo i due assi baricentrici della seguente sezione a "doppio T", per la quale le dimensioni sono espresse in mm.



E' possibile individuare due assi ( $x_0$  e  $y_0$ ) di simmetria per cui il loro punto di intersezione rappresenta il baricentro G.

Per il calcolo dei momenti di inerzia rispetto a tali assi si suddivide la sezione in 3 rettangoli



Il momento di inerzia della sezione rispetto ad  $x_0$  può essere calcolato come differenza tra i momenti di inerzia delle figure.

$$I_{x_0} = I_{ABCD} - I_{EFGH} - I_{ILNM} = I_{ABCD} - 2 \cdot I_{EFGH}$$

L'asse  $x_0$  è baricentrico anche per i rettangoli EFGH e ILMN

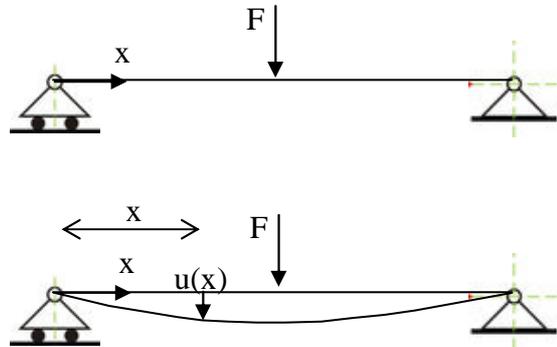
$$I_{ABCD} = \frac{bh^3}{12} = \frac{200 \cdot 200^3}{12} = 133.33 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{EFHG} = \frac{(100 - \frac{9}{2}) \cdot (200 - 2 \cdot 15)^3}{12} = \frac{95.5 \cdot 170^3}{12} = 39.09 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{X_0} = (133.33 - 2 \cdot 39.09) \times 10^6 = 55.15 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

## 5. CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Il calcolo della deformata di una trave corrisponde a trovare una funzione  $u(x)$  che, ad esempio per la trave riportata di seguito, rappresenta lo spostamento della trave ad una generica distanza  $x$  dall'origine del sistema di riferimento (posizione indeformata).



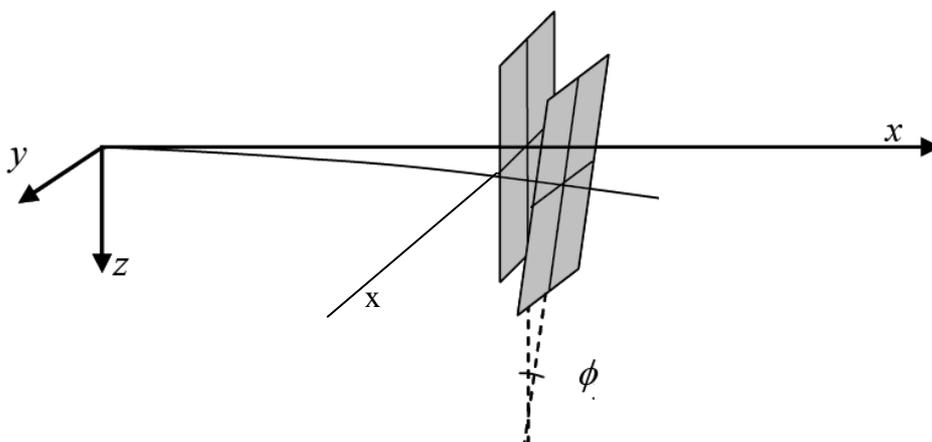
Per le applicazioni più comuni è sufficiente determinare lo spostamento in alcuni punti caratteristici in cui ci si attende il massimo valore (freccia), come ad esempio la mezzeria per travi appoggiate oppure l'estremo libero per le travi a mensola (un estremo incastrato e l'altro libero).

Il calcolo dell'intera deformata (estesa a tutta la trave) presuppone l'applicazione della *teoria della linea elastica*. Tramite questa teoria sono stati calcolati una volta per tutte le deformazioni dei più comuni sistemi di travi isostatiche sotto l'azione di forze concentrate o di carichi distribuiti.

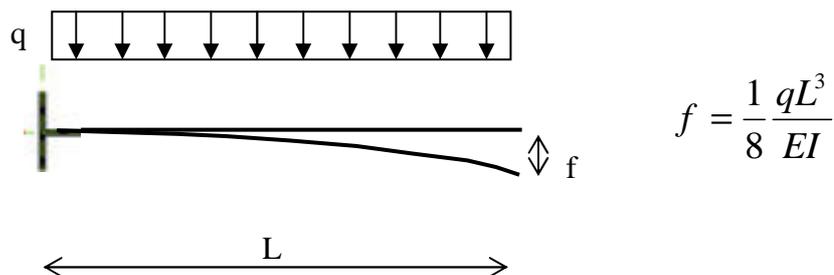
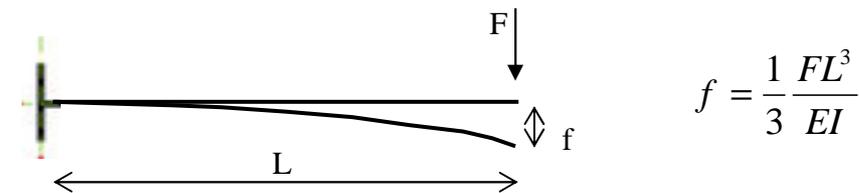
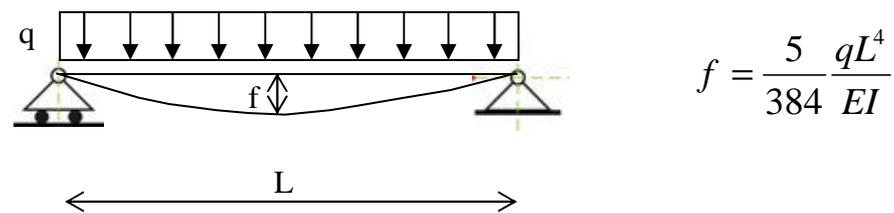
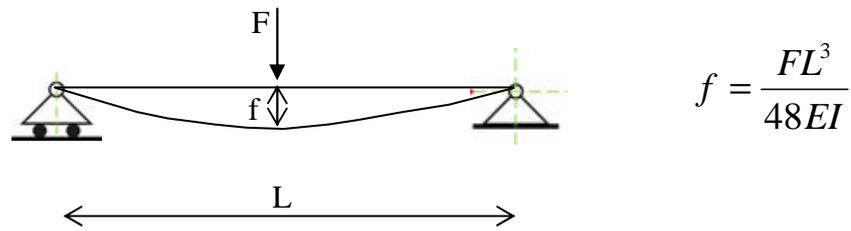
Per il calcolo delle frecce è necessario conoscere la rigidezza flessionale della trave ovvero della sua sezione trasversale nel caso di travi a sezione costante.

La rigidezza flessionale è data dal prodotto  $EI$ , in cui  $E$  è il modulo elastico del materiale da cui è costituita la trave, ed  $I$  è il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico (a volte indicato con  $J$ ) intorno al quale avviene la rotazione della sezione in condizioni deformate.

Nella figura successiva è rappresentata una sezione di una trave sia in condizioni indeformate che in condizioni deformate dopo l'applicazione di un carico alla trave. Si vede che la rotazione della sezione avviene attorno ad un asse parallelo all'asse  $x$ . In questo caso, quindi, il momento di inerzia da tenere in conto nel calcolo della rigidezza flessionale deve essere quello baricentrico rispetto all'asse  $x$ .



I valori dello spostamento massimo (freccia  $f$ ) per alcuni schemi isostatici che si incontrano frequentemente nei problemi di ingegneria strutturale, sono riportati di seguito

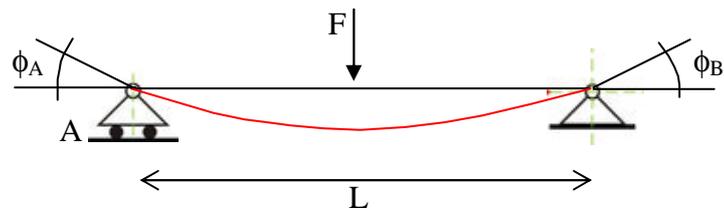


In caso di carichi rappresentati da forze concentrate le deformate sono funzioni cubiche (ordine 3) di  $x$ , mentre in presenza di carichi distribuiti sono funzioni quartiche (ordine 4).

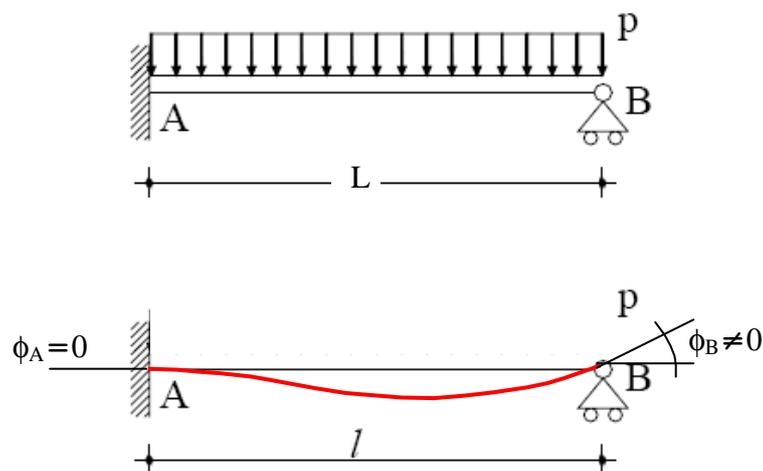
### Tracciamento a maniera delle deformate

Oltre all'applicazione del metodo della linea elastica per il calcolo delle deformate delle travi e dei sistemi di travi è utile poter disegnare delle deformate in maniera approssimata con il metodo cosiddetto "a maniera". Questo metodo si basa sulla considerazione dei vincoli imposti a sistema e dei carichi presenti.

Prendendo in considerazione la trave doppiamente appoggiata riportata sopra si nota che sia il carrello che la cerniera consentono delle rotazioni  $\phi_A$  e  $\phi_B$  diverse da zero. La distribuzione dei carichi è simmetrica rispetto ad un'asse verticale che taglia in due la trave e pertanto anche la deformata dovrà essere in tal senso simmetrica. Infine dalla teoria della linea elastica sappiamo che la deformata deve essere una parabola di ordine 3. Utilizzando tutte queste considerazioni risulta immediato tracciare la deformata come si vede sotto.



Consideriamo un caso di struttura iperstatica ossia una trave incastrata ed appoggiata come di seguito. Sappiamo che l'incastro non permette spostamenti né rotazioni quindi la tangente alla deformata in A deve rimanere parallela all'asse (A-B) della trave, quindi orizzontale. In B il carrello consente rotazioni ma non abbassamenti. Infine in presenza di carichi distribuiti la deformata è una parabola di ordine 4. Ne deriva la deforma disegnata in rosso.

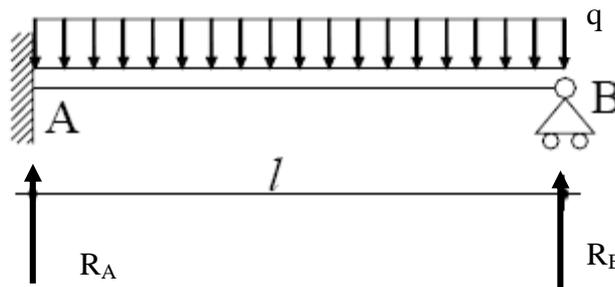


## 6. SISTEMI DI TRAVI IPERSTATICHE

Si consideri la trave in figura. Essa è una volta iperstatica infatti  $3t-s=3-4=-1$ , infatti l'incastro elimina 3 g.d.l. mentre il carrello ne elimina uno ulteriore.

Non è possibile calcolare le reazioni vincolari sulla base di sole condizioni di equilibrio, ossia applicando direttamente le equazioni cardinali della statica, in quanto il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni di equilibrio a disposizione.

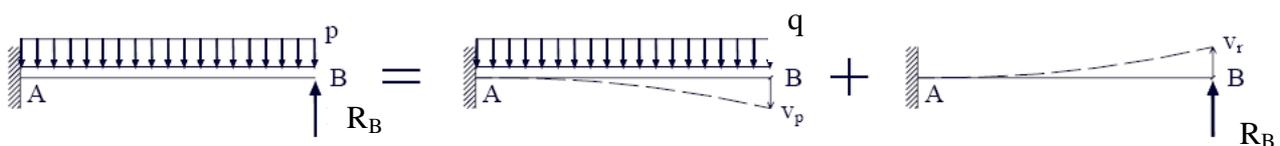
Infatti come reazioni vincolari avremo un coppia in A, una reazione verticale in A e una reazione verticale in B: 3 incognite a fronte di 2 equazioni.



Sarà pertanto necessario considerare anche equazioni di congruenza utilizzando il **metodo delle forze** che consiste, in generale, nel sostituire i vincoli sovrabbondanti con le rispettive reazioni vincolari.

In questo caso, ad esempio, il carrello in B può essere sostituito con la corrispondente reazione vincolare  $R_{yB}$ , assunta come incognita iperstatica. Il sistema così torna ad essere isostatico sebbene, oltre ad essere sottoposto ad un carico distribuito noto è soggetto anche ad una forza concentrata in B il cui valore è sconosciuto.

Tramite il principio di sovrapposizione degli effetti, la mensola riportata in figura può essere considerata come il risultato della somma di due mensole diversamente caricate: la prima con il carico distribuito noto, la seconda con il carico concentrato incognito.



Sfruttando gli schemi con freccia nota sopra riportati si avrà

$$V_p = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad \text{e} \quad V_r = \frac{R_B l^3}{3EI}$$

Per la congruenza con il vincolo in B, che non consente spostamenti diversi da 0, si deve imporre:

$$V_p + V_r = 0$$

e risolvendo rispetto a  $R_B$  si ottiene:

$$R_B = \frac{3}{8} ql$$

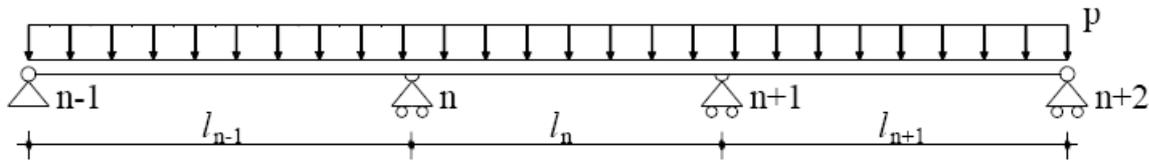
Nota questa reazione vincolare si ritorna di fatto ad un sistema isostatico (trave semplicemente incastrata) con un carico uniformemente distribuito ed una forza concentrata. Si possono così

ricavare le altre reazioni vincolari e le sollecitazioni interne applicando la sovrapposizione degli effetti causati dai due carichi.

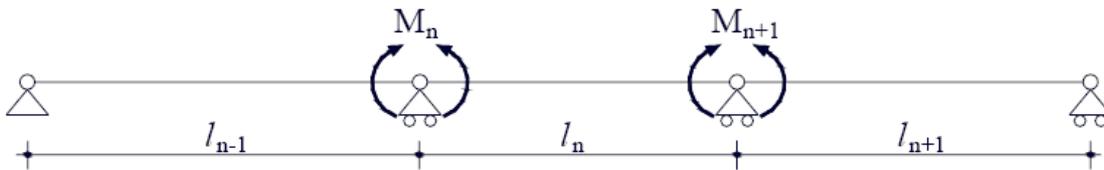
### 6.1 Trave continua su più appoggi: equazione dei tre momenti

Consideriamo la trave mostrata in figura con 4 appoggi e 3 campate (per campata intendiamo quella parte dell'intera trave compresa tra 2 appoggi). Il grado d'iperstaticità di questa trave è  $3t-s=3\cdot5-2=13$ , quindi 13 volte iperstatica.

Infatti, anche eliminando i due carrelli centrali la trave sarebbe ancora isostatica. Si assume che l'inerzia della sezione  $J$  e il modulo elastico  $E$  siano costanti lungo tutta la trave ( $EJ=cost$ ).



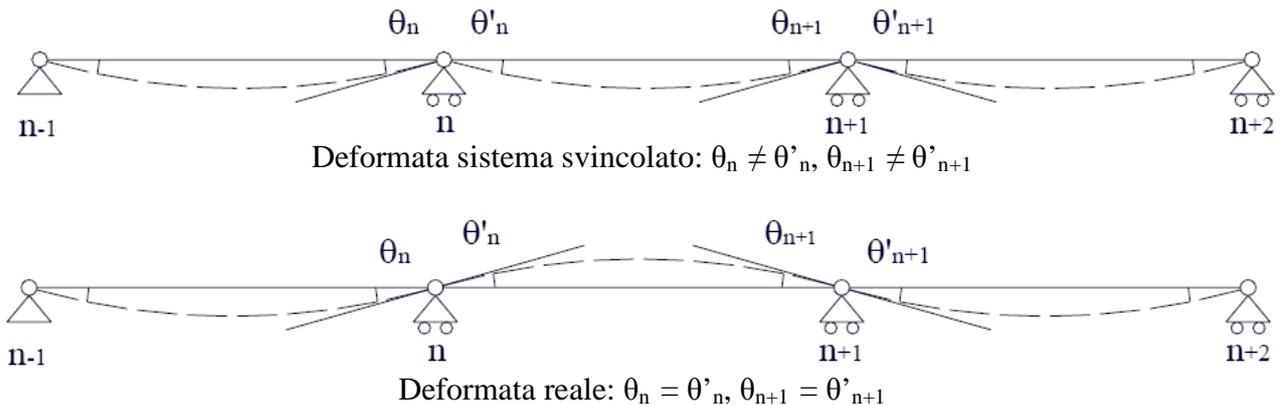
In questo caso conviene assumere come incognite iperstatiche i valori dei momenti che si sviluppano in corrispondenza dei due carrelli centrali. Si interrompe, quindi, la continuità della trave introducendo due cerniere in corrispondenza degli appoggi e si ripristina il sistema statico iniziale applicando in questi nodi le reazioni corrispondenti ai vincoli eliminati.



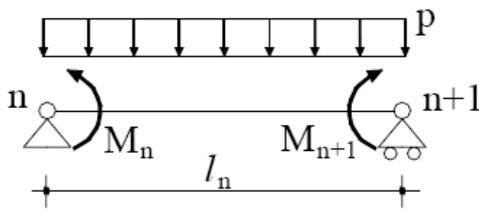
Le reazioni vincolari  $M_n$  ed  $M_{n+1}$  devono essere tali da garantire la congruenza degli spostamenti negli appoggi. In effetti, l'introduzione delle cerniere permetterebbe, in teoria, a due tronchi di trave contigui di ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro ( $\theta_n \neq \theta'_n$  e  $\theta_{n+1} \neq \theta'_{n+1}$ ), mentre, nel sistema reale, gli stessi tronchi di trave sono collegati attraverso un vincolo di continuità che **impone l'uguaglianza delle rotazioni** a sinistra e a destra del vincolo. Pertanto, per la congruenza, si deve avere:

$$\theta_n = \theta'_n \text{ e } \theta_{n+1} = \theta'_{n+1}$$

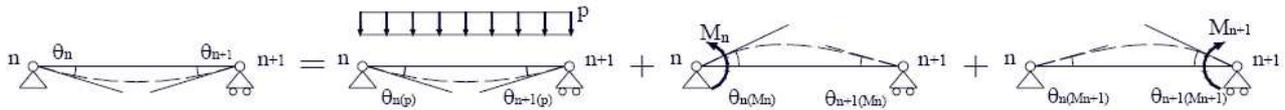
Queste sono le equazioni di congruenza che sommate alle equazioni di equilibrio consentono di risolvere il problema 13 volte iperstatico.



Sulla singola campata resa isostatica si avrà il seguente sistema detto isostatico equivalente



Tale sistema può essere visto come somma di singoli sistemi



Le rotazioni in n ed n+1 valgono

$$\begin{cases} \theta_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(M_n)} + \theta_{n(M_{n+1})} \\ \theta_{n+1} = \theta_{n+1(p)} + \theta_{n+1(M_n)} + \theta_{n+1(M_{n+1})} \end{cases}$$

Tramite la teoria della linea elastica possono ricavarsi i singoli addendi delle due espressioni sopra riportate. Se, come detto in precedenza, le rotazioni positive sono quelle antiorarie, si ha:

$$\begin{aligned} \theta_{n(M_n)} &= \frac{l_n}{3E_n J_n} M_n & ; & \quad \theta_{n(M_{n+1})} = \frac{l_n}{6E_n J_n} M_{n+1} & \quad ; & \quad \theta_{n(p)} = -\frac{l_n^3}{24E_n J_n} p \\ \theta_{n+1(M_n)} &= -\frac{l_n}{6E_n J_n} M_n & ; & \quad \theta_{n+1(M_{n+1})} = -\frac{l_n}{3E_n J_n} M_{n+1} & \quad ; & \quad \theta_{n+1(p)} = \frac{l_n^3}{24E_n J_n} p \end{aligned}$$

Applicando la congruenza all'appoggio n si ha:

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} \text{ rotazione a sinistra} \\ \vartheta'_n &= -\frac{pl_n^3}{24EJ} - \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} \text{ rotazione a destra} \end{aligned}$$

Eguagliando i due termini

$$\frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{pl_n^3}{24EJ} = -\frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} - \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} \quad \text{prima equazione di congruenza}$$

Applicando la congruenza in n+1 si ha

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1} &= \frac{pl_n^3}{24EJ} + \frac{M_n l_n}{3EJ} \text{ rotazione a sinistra} \\ \vartheta'_{n+1} &= -\frac{pl_{n+1}^3}{24EJ} - \frac{M_n l_n}{3EJ} \text{ rotazione a destra} \end{aligned}$$

Eguagliando i due termini si ha

$$p \left( \frac{l_n^3}{24EJ} + \frac{l_{n+1}^3}{24EJ} \right) = -2 \frac{M_n l_n}{3EJ} \quad \text{seconda equazione di congruenza}$$

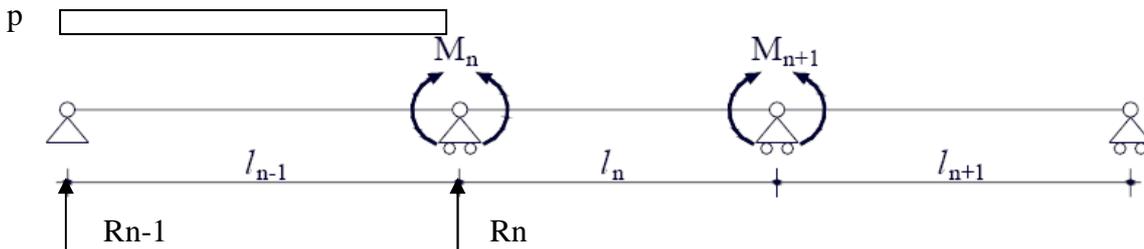
In definitiva due equazioni nelle due incognite  $M_n$  ed  $M_{n+1}$

$$\begin{cases} \frac{p}{24EJ} (l_{n-1}^3 + l_n^3) = -2 \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} & (1) \\ \frac{p}{24EJ} (l_n^3 + l_{n+1}^3) = -2 \frac{M_n l_n}{3EJ} & (2) \end{cases}$$

Trovati i momenti flettenti incogniti in  $n$  e  $n+1$  si possono trovare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione in tutte le campate facendo riferimento agli schemi isostatici caricati con il carico distribuito ed i momenti appena calcolati.

Si ha così dalla (2)

$$M_n = -P/16 * (l_n^2 + l_{n+1}^2 / l_n) \quad (\text{nota sostituendo } M_n \text{ nella 1 si ottiene anche } M_{n+1})$$



Il fatto che  $M_n$  sia negativo significa che il verso ipotizzato non è corretto. Infatti il momento agente in  $n$  tende le fibre superiori e non quelle inferiori come ipotizzato inizialmente.

Si può ora ricavare la reazione  $R_n$  al di sotto del vincolo  $n$ .

Imponendo l'equilibrio del tratto  $l_{n-1}$  si ha

$$R_{n-1} + R_n - p * l_{n-1} = 0 \quad \text{traslazione verticale} \quad (3)$$

$$-R_{n-1} * l_{n-1} + M_n + p * l_{n-1} / 2 = 0 \quad \text{rotazione attorno all'appoggio } n \quad (4)$$

Si ha quindi, dalla 4

$$R_{n-1} = (M_n + p * l_{n-1} / 2) / l_{n-1}$$

Sostituendo  $R_{n-1}$  nella 3 si ricava anche  $R_n$